PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DE OLIMPIADAS

Francisco Bellot Rosado

Aunque un alto porcentaje de los problemas de Geometría que se proponen en las Olimpiadas y concursos se resuelven con ayuda de la semejanza de triángulos, en algunos casos hace falta aplicar técnicas más específicas, como los teoremas de Ceva y Menelao, el teorema de Stewart, el de Van Aubel, e incluso la inversión. Presentamos una colección de problemas geométricos en el que las habilidades necesarias están repartidas.

Problema 1

En el cuadrilátero ABCD está inscrito un círculo, siendo K,L,M,N los puntos de tangencia con los lados AB,BC,CD y DA, respectivamente. Las rectas DA y CB se cortan en S, mientras que BA y CD se cortan en P.

Si S,K y M están alineados, probar que P,N y L también lo están.

(Olimpiada de Bielorrusia 1996)

Solución del estudiante M.Vronski.

Llamemos

$SN = SL = s, PK = PM = p, BK = BL = b, CL = CM = c, DM = DN = d$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo BPC con SM deducimos que la colinealidad de S,K y M es equivalente a

$$1 = \frac{BK}{KP} . \frac{PM}{MC} . \frac{CS}{SB} = \frac{b}{p} . \frac{p}{c} . \frac{s+c}{s-b} = \frac{b\,(s+c)}{c\,(s-b)},$$

es decir, a

$$(c-b)\,s = 2bc \qquad (1)$$

Razonando de forma similar con P,N y L vemos que será suficiente probar que (1) implica

$$(c-d)\,p = 2dc \qquad (2).$$

Aplicando el teorema de Menelao al triángulo PKM con SC, obtenemos

$$1 = \frac{KB}{BP} . \frac{PC}{CM} . \frac{SM}{SK} = \frac{b}{p+b} . \frac{p+c}{c} . \frac{SM}{SK},$$

luego

$$SM = SK . \frac{c\,(p+b)}{b\,(p+c)} \Longleftrightarrow SM^2 = SM.SK . \frac{c\,(p+b)}{b\,(p+c)}.$$

Utilizando ahora la potencia del punto S respecto del círculo inscrito en el cuadrilátero, $SM.SK = SN^2 = s^2$, luego

$$SM^2 = \frac{s^2 c\,(p+b)}{b\,(p+c)}.$$

Por otra parte, el teorema de Stewart para SM en el triángulo CSD da

$$\begin{aligned} SM^2 &= \frac{MC.SD^2 + MD.SC^2}{DC} - MD.MC = \\ \frac{c\,(s+d)^2 + d\,(s+c)^2}{d+c} - dc &= s^2 + \frac{4dcs}{d+c} \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para SM^2 obtenemos

$$\frac{4dcs}{d+c} = s^2.\frac{(c-b)\,p}{b\,(p+c)} = \text{ por (1)} = \frac{2bcps}{b\,(p+c)},$$

luego

$$\frac{2d}{d+c} = \frac{p}{p+c},$$

que es equivalente a (2).

Problema 2

En el triángulo ABC, sea P el punto de concurrencia de las cevianas AA',BB' y CC' (con $A' \in (BC)\,, B' \in (CA)\,, C' \in (AB)$), y sea M un punto del plano del triángulo. Demostrar que

$$\frac{[BPC]\,MA^2 + [CPA]\,MB^2 + [APB]\,MC^2}{[ABC]} = MP^2 + r\,(P)\,,$$

donde r(P) es la potencia de P respecto del círculo circunscrito a ABC y [] representa el área.

(Revista rumana *Gamma)*

Solución.

En primer lugar, aplicando el teorema de Stewart en el triángulo MAA' con la ceviana PM, resulta

$$MA^2.PA' + A'M^2.AP = MP^2.AA' + AP.PA'.AA' \qquad (1).$$

Aplicando el mismo teorema en MBC con A'M, obtenemos

$$MB^2.A'C + MC^2.BA' = A'M^2.BC + BA'.A'C.BC \qquad (2)$$

Eliminando $A'M^2$ entre (1) y (2), despejándolo de (2), llevándolo a (1) y dividiendo por AA' se llega a

$$MA^2.\frac{PA'}{AA'} + MB^2.\frac{A'C.AP}{AA'.BC} + MC^2.\frac{BA'.AP}{AA'.BC} = MP^2 + AP.PA' + \frac{BA'.A'C.AP}{AA'} \quad (3)$$

Vamos ahora a obtener nuevas expresiones en donde intervengan las áreas de los triángulos que aparecen en la expresión final.

Si $PP_1 \perp BC$ y $AA_1 \perp BC$, de la semejanza entre los triángulos PP_1A' y AA_1A' resulta

$$\frac{PA'}{AA'} = \frac{PP_1}{AA_1} = \frac{PP_1.BC}{AA_1.BC} = \frac{[BPC]}{[ABC]} \qquad (4).$$

Por otra parte, los triángulos $AA'C$ y ABC tienen la misma altura; luego $\frac{CA'}{BC} = \frac{[AA'C]}{[ABC]}$; así mismo, $AA'C$ y APC tienen la misma altura; luego $\frac{AP}{AA'} = \frac{[APC]}{[AA'C]}$; multiplicando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{A'C.AP}{AA'.BC} = \frac{[APC]}{[ABC]} \qquad (5);$$

de la misma manera se demuestra

$$\frac{BA'.AP}{AA'.BC} = \frac{[APB]}{[ABC]} \qquad (6).$$

Por otra parte, si llamamos A" al punto de intersección de AA' con el círculo cicunscrito, la potencia de A' respecto de este círculo es

$$BA'.A'C = AA'.A'A'' \qquad (7).$$

Vamos, finalmente, a obtener otra expresión para los dos últimos sumandos de (3):

$$PA'.PA + \frac{BA'.CA'.PA}{AA'} = PA'.PA + A'A''.PA = (PA' + A'A'')\,PA = PA''.PA$$

que es precisamente la potencia de P respecto del círculo circunscrito.

Llevando a (3) lo obtenido en (4),(5),(6) y (7), junto con la observación anterior, se obtiene el resultado.

Particularizando P y M con puntos notables del triángulo se obtienen identidades igualmente notables.

Problema 3

Demostrar que, en el triángulo ABC, si

$$GO = \frac{R}{3},$$

entonces ABC es rectángulo, y recíprocamente.

(Elemente der Mathematik, 1952)

Solución:

Es conocido que los puntos O, G, H y F (centro del círculo de los 9 puntos) están alineados en la recta de Euler y se verifica

$$\frac{OG}{2} = \frac{GF}{1} = \frac{FH}{3}.$$

Como F es el punto medio de OH, y el radio del círculo de los 9 puntos es $\frac{R}{2}$, H será exterior, interior o sobre el circuncírculo cuando ocurra lo mismo para el círculo de 9 puntos. Es claro que si ABC es acutángulo, H es interior al circuncírculo, y si es rectángulo está sobre él (es el vértice del ángulo recto). En un triángulo obtusángulo, H es exterior al círculo de 9 puntos y también al circuncírculo.

Si $OG = \frac{R}{3}$,entonces $OH = R$, y el triángulo es rectángulo.

Así pues, tenemos:

$$
\begin{aligned}
ABC \text{ acutángulo} &\iff GO < \frac{R}{3} \\
ABC \text{ rectángulo} &\iff GO = \frac{R}{3} \\
ABC \text{ obtusángulo} &\iff GO > \frac{R}{3}
\end{aligned}
$$

Problema 4

La gráfica Γ de la función

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

se dibuja en el plano con respecto a unos ejes coordenados rectangulares Oxy. Después se borran los ejes de coordenadas. Reconstruirlos con regla y compás.

(Competición búlgara de primavera, 1992)

Solución oficial

Primero demostraremos que si $A \neq B$ son dos puntos de Γ, M es el punto medio del segmento AB, y C es el punto de intersección de la recta OM con la recta por A paralela al eje OY, entonces el triángulo ABC es rectángulo.

En efecto: $A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right), M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2ab}\right)$; la ecuación de OM es $y = \frac{1}{ab}x$. Por otra parte, todos los puntos de la recta AC, paralela a Oy tienen su primera ccordenada igual a a, así que $C\left(a, \frac{1}{b}\right)$ y BC es paralelo a Ox, es decir, ABC es rectángulo.

Sean ahora

$$A\left(a, \frac{1}{a}\right), B\left(b, \frac{1}{b}\right), C\left(c, \frac{1}{c}\right), D\left(d, \frac{1}{d}\right)$$

cuatro puntos (distintos) de Γ, y

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2ab}\right), N\left(\frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2cd}\right)$$

los puntos medios de AB y CD. Las ecuaciones de AB y CD son

$$y = -\frac{1}{ab}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad y = -\frac{1}{cd}x + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

respectivamente. El número de puntos comunes a esas rectas es el de soluciones del sistema formado por ambas ecuaciones. Este sistema tiene solución única si $ab \neq cd$. Si $ab = cd$ ambas rectas son paralelas. Como las rectas OM y ON tienen por ecuaciones respectivas $y = \frac{1}{ab}x$, $y = \frac{1}{cd}x$ vemos que si AB es paralela a CD, entonces OM = ON. Así hemos obtenido que si AB y CD son dos cuerdas paralelas de Γ, entonces MN pasa por el origen de coordenadas. En consecuencia, para construir el origen de coordenadas es suficiente tomar dos pares de cuerdas paralelas y hallar el punto de intersección de las rectas que pasan por los puntos medios de esos dos pares.

Los ejes pueden ser reconstruídos tomando primero una cuerda arbitraria AB con punto medio M y llamando C al punto de intersección de la circunferencia de diámetro AB y la recta OM. Entonces Ox es paralela a BC y Oy a AC.

Problema 5

Resolver la ecuación

$$\sqrt{abx\,(x-a-b)}+\sqrt{bcx\,(x-b-c)}+\sqrt{cax\,(x-c-a)}=\sqrt{abc\,(a+b+c)}$$

(Mathesis, 1890)

Solución:

La simetría de la ecuación y las expresiones subradicales inducen a pensar que será posible resolver el problema con ayuda de la fórmula de Herón; en efecto, poniendo

$$\begin{aligned}\sqrt{abx\,(x-a-b)} &= \gamma; \qquad \sqrt{bcx\,(x-b-c)}=\alpha;\\ \sqrt{cax\,(c-c-a)} &= \beta; \qquad \sqrt{abc\,(a+b+c)}=\delta,\end{aligned}$$

se ve fácilmente que $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ representan el doble de las áreas de los triángulos de lados respectivos

$$\begin{array}{cccc} b+c & x-b & x-c & (\alpha)\\ c+a & c-c & x-a & (\beta)\\ a+b & x-a & x-b & (\gamma)\\ b+c & c+a & a+b & (\delta)\end{array}$$

Consideremos el triángulo ABC de lados $b+c, c+a, a+b$. De la relación $\alpha+\beta+\gamma=\delta$ resulta que en el plano de este triángulo existe un punto O cuyas distancias a A,B,C son $x-a, x-b, x-c$.

Aplicando las fórmulas de Briggs

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\widehat{CAO} &= \sqrt{\frac{a\,(x-a-c)}{(x-a)\,(c+a)}}, \qquad \cos\frac{1}{2}\widehat{CAO}=\sqrt{\frac{cx}{(x-a)\,(c+a)}}\\ \sin\frac{1}{2}\widehat{BAO} &= \sqrt{\frac{a\,(x-a-b)}{(x-a)\,(a+b)}}, \qquad \cos\frac{1}{2}\widehat{BAO}=\sqrt{\frac{bx}{(x-a)\,(a+b)}}\\ \sin\frac{1}{2}\widehat{CAB} &= \sqrt{\frac{bc}{(a+b)\,(a+c)}}\end{aligned}$$

Sustituyendo esos valores en la relación

$$\sin\frac{1}{2}\widehat{CAB}=\sin\frac{1}{2}\widehat{CAO}.\cos\frac{1}{2}\widehat{BAO}+\cos\frac{1}{2}\widehat{CAO}.\sin\frac{1}{2}\widehat{BAO}$$

se obtiene, simplificando:

$$bc\,(x-a)=b\beta+c\gamma.$$

Análogamente se obtienen

$$ca\,(x-b)=c\gamma+a\alpha,\qquad ab\,(x-c)=a\alpha+b\beta.$$

Restando de la suma de las dos últimas la primera resulta

$$x\,(ca+ab+bc)-abc=2a\alpha=2a\sqrt{bcx\,(x-b-c)}$$

de donde

$$\left[(ca+ab-bc)^2-4a^2bc\right]x^2+2abc\,(ab+bc+ca)\,x+a^2b^2c^2=0;$$

el coeficiente de x^2 se puede poner como

$$\sum b^2c^2-2abc\sum a=\left(\sum bc\right)^2-4\delta^2,$$

así que la ecuación cuadrática toma la forma

$$\left(x\sum bc+abc\right)^2=4\delta^2x^2,$$

así que, extrayendo la raíz cuadrada a los dos miembros,

$$x=\frac{-abc}{bc+ca+ab\pm2\delta}$$

La ecuación (y el problema) admite la siguiente reformulación geométrica: Hallar el radio de una circunferencia tangente exteriormente a tres circunferencias dadas de radios a,b,c tangentes dos a dos. Se puede poner

$$x=\frac{2}{r}\pm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

siendo r el inradio del triángulo ABC cuyos vértices son los centros de las tres circunferencias dadas.

Problema 6

Olimpiada de Chequia 1994

Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas del triángulo acutángulo ABC, y sea V su punto de intersección. Si los triángulos AC_1V, BA_1V y CB_1V tienen la misma área, ¿será ABC equilátero?

Solución

Probaremos que, si tres cevianas concurrentes determinan triángulos de la misma área, entonces V es el baricentro del triángulo. Como un triángulo cuya mediana coincide con su altura es claramente isósceles, uno cuyo baricentro coincida con su ortocentro será equilátero.

Para demostrar nuestra afirmación, sean x, y, z, v las áreas respectivas de los triángulos $VBA_1, VBC_1, VCA_1, VAB_1$.

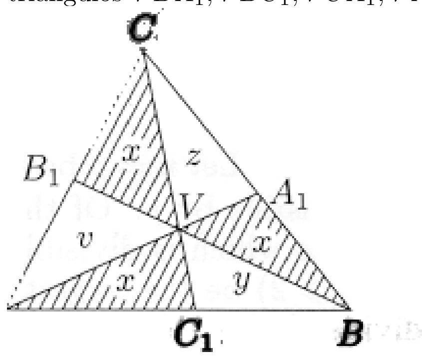


Fig. 3

Se verifica

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{x}{y} = \frac{2x+v}{x+y+z},$$

así que, tras algunas manipulaciones,

$$x\left(x+z\right) = y\left(x+v\right);$$

análogamente

$$\begin{aligned} x\left(x+v\right) &= z\left(x+y\right) \\ x\left(x+y\right) &= v\left(x+z\right) \end{aligned}$$

Sin pérdida de la generalidad, se puede suponer que $y \geq z, y \geq v$.

Como $x + v \leq x + y$, se sigue que de la segunda igualdad $x \geq z$.

Análogamente, de la tercera igualdad se deduce $x \leq v$, luego $z \leq x \leq v$.

Finalmente, de la primera igualdad se deduce también que $x \geq y$.

Por lo tanto, $x = y = v$. Los puntos A_1, B_1, C_1 deben ser los puntos medios de los lados del triángulo, y V debe ser el baricentro.

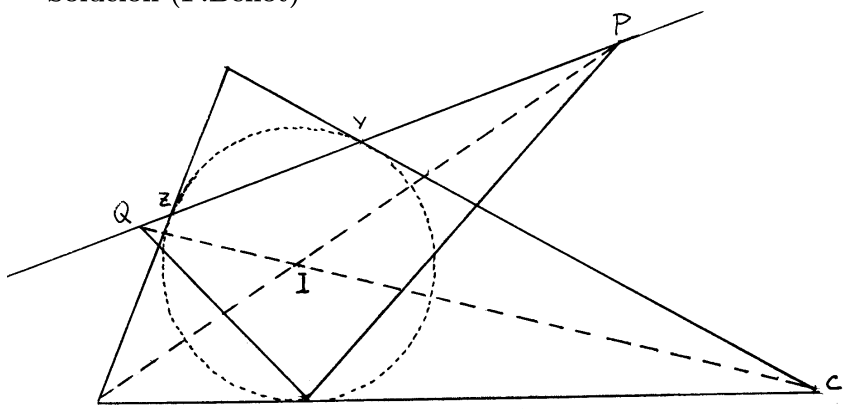
Problema7

Olimp. Iberoamericana 2001, Problema 2

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro I y es tangente a los lados BC,CA y AB en los puntos X, Y, Z respectivamente. Las rectas BI y CI cortan a la recta YZ en los puntos P y Q, respectivamente.

Demostrar que si los segmentos XP y XQ tienen la misma longitud, entonces ABC es isósceles.

Solución (F.Bellot)



El triángulo AZY es isósceles, así que $\widehat{AZY} = 90 - \frac{A}{2}$.

Entonces $\widehat{BZP} = 90 + \frac{A}{2}$. Y de aquí que $\widehat{ZPB} = \frac{C}{2}$. Entonces, el teorema del seno en BZP da:

$$\frac{BP}{\sin\left(90 + \frac{A}{2}\right)} = \frac{BZ}{\sin\frac{C}{2}}$$

Como $BZ = p - b$, resulta así

$$BP = \frac{(p-b)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

que, utilizando las conocidas fórmulas

$$\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}} \\ \sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{ab}} \end{aligned}$$

se expresa en la forma

$$BP^2 = \frac{ap\,(p-b)}{c} = a^2\cos^2\frac{B}{2} \Longrightarrow BP = a\cos\frac{B}{2}.$$

Entonces, el teorema del coseno en BXP nos permite escribir XP^2 :

$$\begin{aligned} XP^2 &= BX^2 + BP^2 - 2BX \cdot BP\cos\frac{B}{2} \\ &= \cdots = (p-b)\,\frac{b\,(p-c)}{c} \end{aligned}$$

Para hallar XQ^2 sólo hay que cambiar la b por c y recíprocamente, con lo que

$$XQ^2 = (p-c)\,\frac{c\,(p-b)}{b}$$

así que

$$XP^2 = XQ^2 \Longleftrightarrow b^2 = c^2,$$

y ABC es isósceles.

Comentario : Resulta cuando menos sorprendente que en el banco de problemas de Geometría de la Iberoamericana no hubiera otro problema de Geometría en el que hubiera que hacer algo más que aplicar las fórmulas para las razones trigonométricas de los ángulos mitad en un triángulo

Problema 8

Sea M un punto interior al triángulo ABC. Las paralelas por M a AB y a AC forman, con BC, un triángulo de área S_a. Se definen análogamente S_b y S_c.

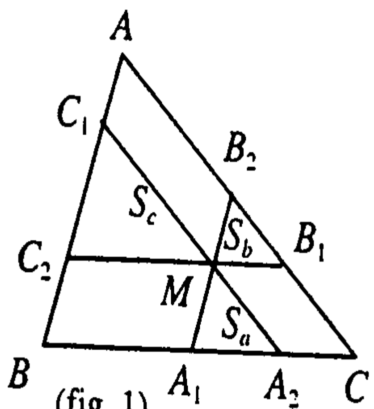
a) Demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{S_a}} + \frac{1}{\sqrt{S_b}} + \frac{1}{\sqrt{S_c}} \geq \frac{9}{\sqrt{area\,[ABC]}}$$

b) Determinar la posición del punto M para que se verifique la igualdad.

Solución

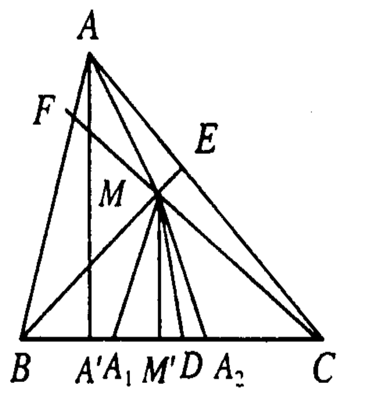
Utilizaremos las notaciones de la figura 1 :



(fig. 1)

Y además, ponemos $S = area\,[ABC]\,, x = \frac{MD}{AD}, y = \frac{ME}{BE}, z = \frac{MF}{CF}$, donde

$AM \cap BC = D, BM \cap AC = E, CM \cap AB = F (fig.2)$



(fig. 2)

Se observa que los triángulos A_1MA_2 y ABC son semejantes (tienen los lados paralelos), con razón de semejanza A_1M/AB. Como los triángulos DMA_1 y DAB también son semejantes, tenemos

$$\frac{A_1M}{AB} = \frac{DM}{AD} = x \Longrightarrow \frac{area\,[A_1MA_2]}{area\,[ABC]} = \left(\frac{A_1M}{AB}\right)^2 = x^2 = \frac{S_a}{S}.$$

Un razonamiento similar demuestra que

$$\frac{S_b}{S} = y^2, \frac{S_c}{S} = z^2.$$

Entonces la desigualdad del enunciado se convierte en

$$\sqrt{\frac{S}{S_a}} + \sqrt{\frac{S}{S_b}} + \sqrt{\frac{S}{S_c}} \geq 9 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9 \qquad (1).$$

Es fácil comprobar que $x + y + z = 1$

En efecto, como

$$x = \frac{MD}{AD} = \frac{MM'}{AA'} = \frac{area\,[BMC]}{area\,[ABC]},$$

y, análogamente,

$$y = \frac{area\,[AMC]}{area\,[ABC]}, z = \frac{area\,[AMB]}{area\,[ABC]},$$

teniendo en cuenta que M es un punto interior al triángulo, se obtiene inmediatamente $x + y + z = 1$.

Como, cualesquiera que sean los números reales positivos x, y, z se verifica

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

en nuestro caso esta desigualdad se convierte en (1).

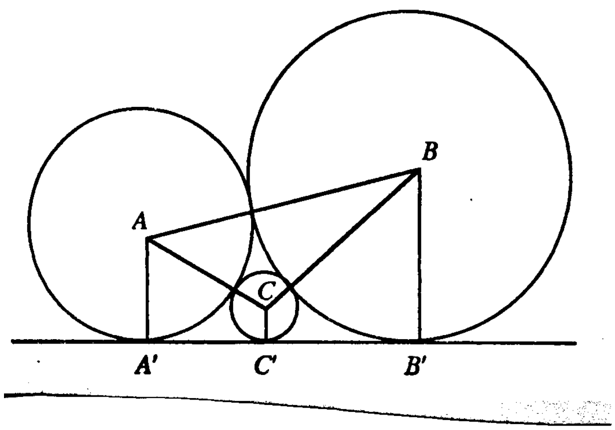
Y la condición de igualdad es la igualdad de áreas entre los triángulos AMB, BMC y CMA, lo cual se produce cuando M es el baricentro de ABC y sólo en ese caso.

Problema 9

Se dan en el plano una recta Δ y tres circunferencias de centros A,B,C, tangentes a Δ y tangentes exteriores entre sí dos a dos. Demostrar que el triángulo ABC es obtusángulo y hallar el valor máximo de la medida del ángulo obtuso.

Solución

Supongamos que los radios de los tres círculos son respectivamente a, b, c y que $c = \min\{a, b, c\}$. Sean A', B', C' las proyecciones ortogonales de A, B, C sobre Δ.



Entonces

$$A'B' = \sqrt{(b+a)^2 - (b-a)^2} = 2\sqrt{ab}$$

y análogamente $B'C' = 2\sqrt{bc}, A'C' = 2\sqrt{ac}$. De la igualdad $A'B' = A'C' + C'B'$ resulta $\sqrt{ab} = \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$ (1). Esta igualdad es equivalente a

$$c = \frac{ab}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2} \quad (2)$$

El teorema del coseno en ABC da:

$$\cos C = \frac{c(a+b+c) - ab}{(a+c)(b+c)} \qquad (3)$$

Vamos a demostrar que ABC es obtusángulo en C. En efecto,

$$\begin{aligned}
\cos C &< 0 \Longleftrightarrow c\,(a+b+c) < ab \\
c\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab} + c\right] &< c\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \\
c &< 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}\right) \Longleftrightarrow \\
\sqrt{c} &< 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \Longleftrightarrow c < 2\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

que es cierta. Por lo tanto, $C > \frac{\pi}{2}$.

Para calcular el máximo valor de C, escribimos (3) en la forma

$$\cos C = 1 - \frac{2ab}{(a+c)\,(b+c)} \Longleftrightarrow \sin^2\frac{C}{2} = \frac{ab}{(a+c)\,(b+c)} \quad (4)$$

Ya que $\frac{\pi}{2} < C < \pi, \frac{\pi}{4} < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$. Vamos a calcular de forma elemental el máximo valor del $\sin^2\frac{C}{2}$. Para ello escibimos (4) en la forma

$$\sin^2\frac{C}{2} = \frac{1}{\frac{a+c}{a}.\frac{b+c}{b}} = \frac{1}{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)},$$

con lo que el problema es hallar el valor mínimo de la expresión

$$P = \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)$$

Ponemos $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = u, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = v$, con lo que $P = \left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)$, con la condición suplementaria $u+v=1$. Sea $p = uv$. Entonces

$$P = 1 + u^2 + v^2 + u^2v^2 = 1 + 1 - 2uv + u^2v^2 = p^2 - 2p + 2$$

Así, el problema es hallar el valor mínimo del trinomio $p^2 - 2p + 2$, donde $p = uv = u\,(1-u) = -u^2 + u$ con $0 < u < 1$. Esto significa que $0 < p \leq \frac{1}{4}$. El trinomio P es decreciente en $\left(0, \frac{1}{4}\right]$ con lo que el mínimo se alcanza en $p = \frac{1}{4}$, con $u = v = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $\sin^2\frac{C}{2}$ alcanza su máximo cuando $a = b$, y en ese caso

$$\frac{a^2}{(a+c)^2} = \frac{a^2}{\left(a+\frac{a^2}{4a}\right)^2} = \frac{a^2}{\left(a+\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$$

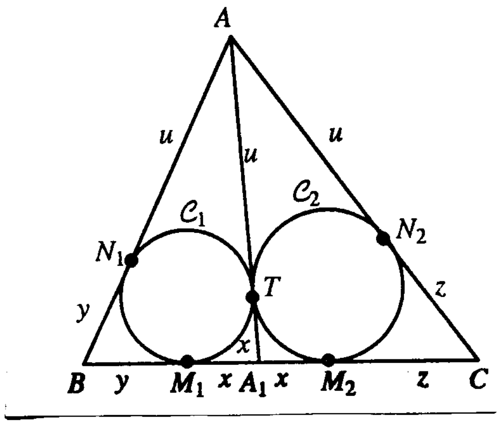
de donde $C_{\max} = 2\arcsin\frac{4}{5}$.

Problema 10

Sea el triángulo ABC y $A_1 \in (BC)$. Demostrar que los círculos inscritos en los triángulos ABA_1 y ACA_1 son tangentes entre sí , si y solamente si A_1 es el punto de tangencia del círculo inscrito en ABC.

Solución

Supongamos primero que los círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, inscritos respectivamente en ABA_1 y ACA_1, son tangentes. Demostraremos que A_1 es el punto de tangencia del incírculo de ABC con el lado BC, lo que equivale a probar que $BA_1 = p - b$, siendo p el semiperímetro de ABC.



La recta AA_1 es tangente a cada uno de los círculos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ así que es la tangente común en el punto de tangencia T de ambos. Sean M_1, M_2 los puntos de tangencia de ambos círculos con BC, y los demás puntos que se indican en la figura. Se tiene

$$\begin{aligned} x &= A_1M_1 = A_1M_2 = A_1T; \\ y &= BM_1 = BN_1; z = CM_2 = CN_2; \\ u &= AN_1 = AT = AN_2 \end{aligned}$$

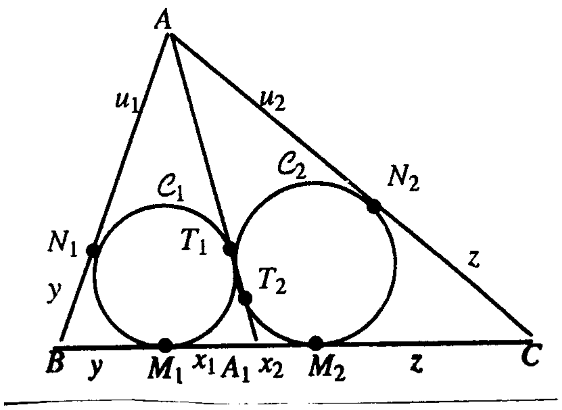
Se tienen las igualdades evidentes

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= a \quad (1) \\ z + u &= b \quad (2) \\ y + u &= c \quad (3) \end{aligned}$$

De (2) resulta $u = -z + b$, que con (3) da $z = y + b - c$; sustituyendo en (1) obtenemos $2x + y + y + b - c = a$, es decir

$$x + y = BA_1 = \frac{a - b + c}{2} = p - b.$$

Recíprocamente, supongamos ahora que A_1 es el punto de tangencia del círculo inscrito en ABC con BC. Vamos a demostrar que la recta AA_1 es tangente en un mismo punto T a ambos círculos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. En principio, sea T_1 el punto de tangencia de AA_1 con $\mathcal{C}_1$ y T_2 el punto de tangencia de AA_1 con $\mathcal{C}_2$. Sobre la figura, se tiene



$$\begin{aligned} x_1 &= A_1M_1 = A_1T_1; x_2 = A_1M_2 = A_1T_2 \\ u_1 &= AN_1 = AT_1; u_2 = AN_2 = AT_2 \\ y &= BM_1 = BN_1; z = CM_2 = CN_2 \end{aligned}$$

Establecidas estas notaciones, se tienen las igualdades

$$AA_1 = AT_1 + T_1A_1 = u_1 + x_1 = c - y + x_1 = c + (y + x_1) - 2y = c + p - b - 2y \quad (4)$$

$$AA_1 = AT_2 + T_2A_1 = u_2 + x_2 = b - z + x_2 = b + (z + x_2) - 2z = b + p - x - 2z \quad (5)$$

De (4) y (5) resulta

$$c + p - b - 2y = b + p - c - 2z \Longleftrightarrow z = y + b - c$$

y de aquí obtenemos

$$x_2 = (p - c) - z = (p - c) - (y + b - c) = (p - b) - y = x_1$$

de modo que $A_1T_1 = A_1T_2$ y $T_1 = T_2$.

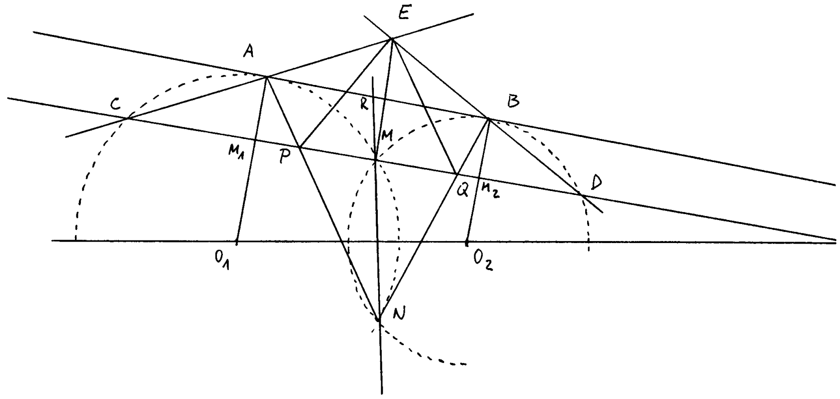
Problema 11

Problema #1, IMO 2000

Dos circunferencias, Γ_1 y Γ_2, se cortan en M y N. Sea t la recta tangente común a ambas circunferencias, tal que M está más cerca de t que N. La recta t es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a t que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se cortan en E. Las rectas AN y CD se cortan en P; las rectas BN y CD se cortan en Q.

Demostrar que $EP = EQ$.

Solución 1 *(Mª A. López Chamorro)*



Si O_1, O_2 son los respectivos centros, y M_1,M_2 son los puntos medios respectivos de MC y MD, entonces se tiene :

$O_1A \parallel O_2B$; $M_1A = M_2B$.

La perpendicular a AB que pasa por M tiene que pasar también por E, pues llamando E_1 al punto de intersección de tal perpendicular con AC y E_2 al de intersección con BD, sería

$ME_1 = 2M_1A = 2M_2B = ME_2$.

Esto prueba que $E_1 = E_2 = E$.

Por su parte, el eje radical MN corta a la tangente AB en su punto medio R, luego $RA = RB$.

Los triángulos NAR y NMP son semejantes ; de aquí

$$\frac{NA}{PN} = \frac{NR}{NM} = \frac{RA}{PM}.$$

Análogamente, los triángulos NBR y NMQ son semejantes, luego

$$\frac{NB}{NQ} = \frac{NR}{NM} = \frac{RB}{QM}$$

Por lo tanto,

$$\frac{RA}{PM} = \frac{RB}{QM} \Longrightarrow PM = QM \Longrightarrow EP = EQ.$$

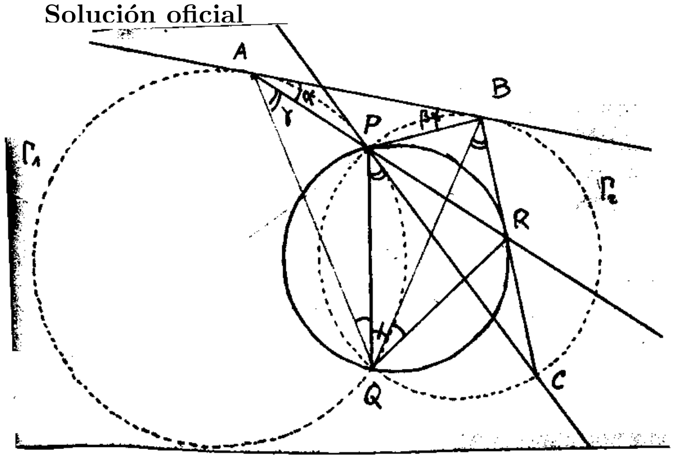
Problema 12

Problema 2, APMO99

Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se cortan en P y Q. La tangente común a ambas, más próxima a P, es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La tangente a Γ_1 en P corta a Γ_2 en $C \neq P$, y la prolongación de AP corta a BC en R.

Demostrar que el círculo circunscrito a PQR es tangente a BP y a BR.

Solución oficial



Sean $\alpha = \widehat{PAB}, \beta = \widehat{ABP}, \gamma = \widehat{QAP}$. Ya que PC es tangente a la primera circunferencia, se tiene $\widehat{QPC} = \widehat{QBC} = \gamma$. Por tanto, los puntos A, B, R y Q son concíclicos.

Ya que AB es la tangente común a las dos circunferencias, $\widehat{AQP} = \alpha$ y $\widehat{PQB} = \widehat{PCB} = \beta$. Por lo tanto, ya que A,B,R,Q son concíclicos, $\widehat{ARB} = \widehat{AQP} = \alpha+\beta$ y por tanto $\widehat{BQR} = \alpha$. Así obtenemos que $\widehat{PQR} = \widehat{PQB}+\widehat{BQR} = \alpha + \beta$.

Como $\widehat{BPR}$ es un ángulo exterior del triángulo ABP, $\widehat{BPR} = \alpha + \beta$.

Así tenemos

$$\widehat{PQR} = \widehat{BPR} = \widehat{BRP},$$

luego el circuncírculo de PQR es tangente a BP y a BR.

Problema 13

Sea ABCDEF un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC es paralelo a FE y CD es paralelo a AF. Sean R_A, R_C, R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos FAB, BCD y DEF, respectivamente; y sea p el perímetro del hexágono.

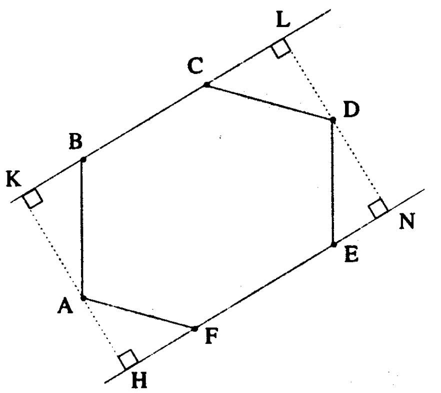
Demostrar que

$$R_A + R_E + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

(*Original de Nairi M. Sedrakian).*

Solución oficial

Sean a, b, c, d, e, f las longitudes de AB, BC, DE, EF y FA, respectivamente. Obsérvese que los ángulos opuestos del hexágono son iguales ($\widehat{A} = \widehat{D}, \widehat{B} = \widehat{E}, \widehat{C} = \widehat{F}$). Desde A y D se trazan perpendiculares a las rectas BC y EF (v. la figura)



Se verifican las relaciones

$$\begin{aligned} KH &= AB\sin B + AF\sin F \\ LN &= DC\sin C + DE\sin E \end{aligned}$$

que, mediante la igualdad de ángulos opuestos en el hexágono, se covierten en

$$\begin{aligned} KH &= AB\sin B + AF\sin C \\ LN &= DC\sin C + DE\sin B \end{aligned}$$

La distancia KH=LN es la distancia entre las rectas BC y EF, luego

$$BF \geq KH = LN,$$

y por lo tanto

$$2BF \geq KH + LN = AB\sin B + AF\sin C + DC\sin C + DE\sin B.$$

El teorema de los senos en ABF da BF $= 2R_A.\sin A$, de donde

$$4R_A\sin A = 2BF \geq AB\sin B + AF\sin C + DC\sin C + DE\sin B$$

y análogamente

$$\begin{aligned} 4R_C\sin C &= 2BD \geq FA\sin A + FE\sin B + CB\sin B + CD\sin A \\ 4R_E\sin B &= 2DF \geq BC\sin C + BA\sin A + ED\sin A + EF\sin C \end{aligned}$$

Dividiendo esas desigualdades respectivamente por $\sin A, \sin B, \sin C$ y sumando, se obtiene

$$\begin{aligned} 4\left(R_A+R_C+R_E\right) \quad \geq \quad & DC\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)+CB\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right) \\ & +BA\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right)+AF\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right) \\ & +FE\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+ED\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin B}\right) \end{aligned}$$

y ya lo único que falta para obtener el resultado es utilizar la desigualdad (bien conocida) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$, puesto que resulta

$$4\left(R_A+R_C+R_E\right) \geq 2p \Longleftrightarrow R_A+R_C+R_E \geq \frac{p}{2}.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si el hexágono es regular.

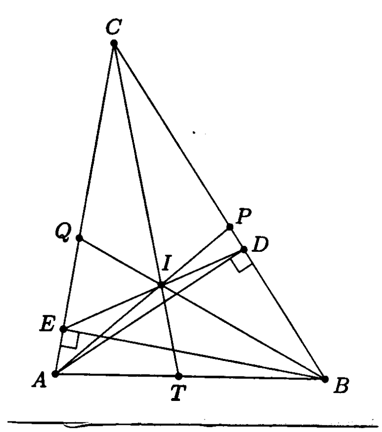
Observación 1: Sedrakian ha publicado en Mathematics Competitions, vol. 9, n^{o}2, 1996 un artículo titulado The Story of creation of a 1996 IMO problem, en el que explica el proceso de obtención del problema.

Observación 2: Este fué el problema más difícil de la IMO de Bombay ; solamente fué resuelto por 6 estudiantes: dos rumanos y 4 armenios (!!!). Los seis estudiantes chinos obtuvieron cero puntos en él.

Problema 14

En el triángulo acutángulo ABC, AD y BE son alturas, y AP,BQ bisectrices interiores. Si I,O son, respectivamente, el incentro y el circuncentro de ABC, demostrar que

$$D, E, I \text{ están alineados } \Leftrightarrow P, Q, O \text{ están alineados}$$



Solución

Como AD y BE son alturas,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c.\cos B}{b.\cos C}; \qquad \frac{AE}{EC} = \frac{c.\cos A}{a.\cos C} \qquad (1)$$

Como AP y BQ son bisectrices interiores,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{c}{b}; \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{c}{a} \qquad (2).$$

Por otra parte, la condición necesaria y suficiente para que la transversal EF pase por el incentro I de ABC es

$$\frac{EA}{EC}.a + \frac{DB}{DC}.b = c \qquad (3);$$

y la condición necesaria y suficiente para que la transversal PQ pase por el circuncentro O del triángulo acutángulo ABC es

$$\frac{QA}{QC}\sin 2A + \frac{PB}{PC}\sin 2B = \sin 2C \qquad (4)$$

Nota: (3) y (4) son casos particulares del llamado teorema de la transversal, o teorema de Cristea (1953); para un tratamiento de este teorema, v.[2] .

Volviendo al problema, sustituyendo (2) en (3) y (1) en (4) se obtiene, respectivamente

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos A}{\cos C} + \frac{\cos B}{\cos C} = 1$$

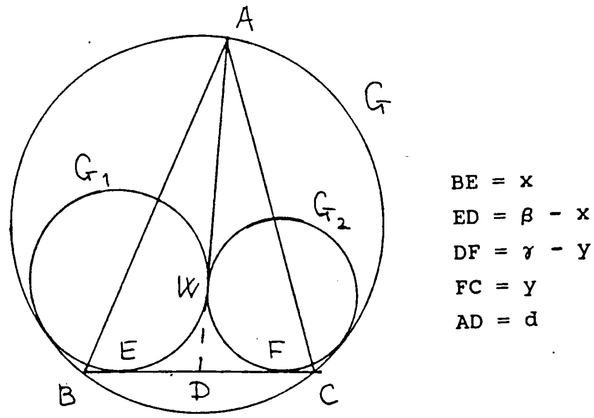
$$(4) \quad \Leftrightarrow \quad \text{usando el teor. del seno, } \frac{\sin C \sin A \cos A}{\sin A \sin C \cos C} + \frac{\sin C \sin B \cos B}{\sin B \sin C \cos C} = 1$$

que son claramente equivalentes.

Problema 15

Las circunferencias G, G_1, G_2 están relacionadas de la siguiente manera: G_1 y G_2 son tangentes exteriores en el punto W; ambas son, además, tangentes interiores a G. Los puntos A,B y C de la circunferencia G se determinan de la siguiente forma: BC es la tangente exterior común a G_1 y G_2; y WA es la tangente común interior a G_1 y G_2, de modo que W y A están a un mismo lado de la recta BC.

Demostrar que W es el incentro de ABC.



Solución oficial

Sea D el punto donde WA corta a BC. Sean E,F los puntos donde G_1 y G_2 son tangentes a BC. Definimos las longitudes x, y, β, γ, d como sigue:

$$x = BE, y = CF, \beta = BD, \gamma = CD, d = AD;$$

entonces se tiene

$$DE = \beta - x, \quad DF = \gamma - y$$

y puesto que DE = DW = DF, es $\beta - x = \gamma - y$.
Además, AW $= d - \beta + x = d - \gamma + y$.
Vamos a considerar el sistema de 4 circunferencias:

de centro A y radio 0;
G_1;
de centro B y radio 0;
de centro C y radio 0.

Esos cuatro círculos son tangentes a G; los consideraremos interiores y aplicaremos el teorema generalizado de Ptolomeo (o de Casey) entre las longitudes de las tangentes comunes exteriores, que son:

$$\begin{array}{rcl}
\text{entre (A,0) y } G_1 & : & d - \beta + x \\
\text{entre (A,0) y (B,0)} & : & c \\
\text{entre (A,0) y (C,0)} & : & b \\
\text{entre } G_1 \text{ y (B,0)} & : & x \\
\text{entre } G_1 \text{ y (C,0)} & : & a - x \\
\text{entre (B,0) y (C,0)} & : & a
\end{array}$$

Por lo tanto, según la relación de Ptolomeo,

$$(d-\beta+x)\,a+bx=c\,(a-x)\,,$$

que se puede escribir, con la habitual notación $2s=a+b+c$,

$$x=\frac{a}{2s}\,(\beta+c-d) \qquad (1)$$

De manera análoga, considerando G_2 y los tres círculos degenerados anteriores se llega a

$$y=\frac{a}{2s}\,(\gamma+b-d) \qquad (2).$$

Como DE = DW = DF, usando (1) y (2) podemos escribir

$$\beta-\frac{a}{2s}\,(\beta+c-d)=\gamma-\frac{a}{2s}\,(\gamma+b-d)\,,$$

o bien

$$(b+c)\,\beta-ac=(b+c)\,\gamma-ab\Leftrightarrow(b+c)\,(\beta-\gamma)=a\,(c-b)\,.$$

Como $\beta+\gamma=a$, esta última expresión da

$$(b+c)\,(\beta-\gamma)=(\beta+\gamma)\,(c-b)\,,$$

que se simplifica hasta llegar a

$$c\gamma=\beta b\Leftrightarrow\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}\Leftrightarrow AD \text{ bisectriz de } \widehat{BAC}.$$

Para completar la solución del problema debemos probar que BW es otra bisectriz; lo haremos en el triángulo ABD porque AD es tangente a G_1 y G_2 y así no hay que buscar expresiones para los segmentos en que BW corta a CA.

Por el teorema de la bisectriz,

$$\beta=\frac{ac}{b+c};\gamma=\frac{ab}{b+c},$$

luego

$$\beta-x=\frac{ad}{2s};$$

por lo tanto,

$$\frac{d}{\beta-x}=\frac{2s}{a}=\frac{a+b+c}{a},$$

y entonces

$$\begin{aligned}\frac{AW}{DW} &= \frac{AD}{DW}-1=\frac{d}{\beta-x}-1=\frac{a+b+c}{a}-1\\ &= \frac{b+c}{a}=\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{BA}{BD}\Leftrightarrow BW \text{ bisectriz de } \widehat{ABC}\end{aligned}$$

La solución es completa.

Problema 16

Un problema de la Olimpiada de Rusia 1994

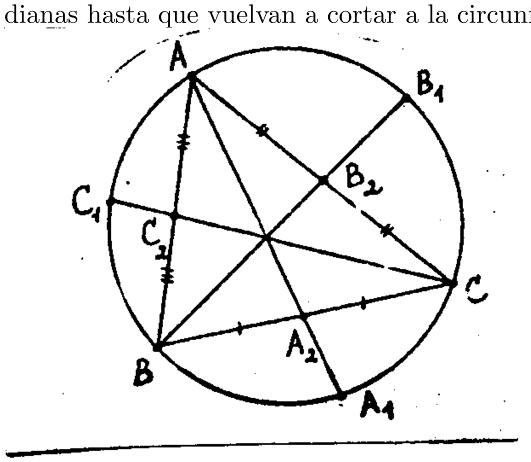
Sean a, b, c los lados de un triángulo; m_a, m_b, m_c las longitudes de sus medianas, y D el diámetro del círculo circunscrito. Demostrar que

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\le 6D.$$

(Dimitri Tereshin)

Solución

El hecho de que en la desigualdad propuesta aparezca el diámetro del círculo circunscrito, que es la mayor cuerda de dicho círculo, sugiere prolongar las medianas hasta que vuelvan a cortar a la circunferencia circunscrita :



Llamamos a los nuevos puntos de intersección con la circunferencia circunscrita A_1, B_1, C_1. Es obvio que

$$AA_1\le D,\ BB_1\le D,\ CC_1\le D,$$

o lo que es lo mismo,

$$m_a+A_1A_2\le D,\ m_b+B_1B_2\le D,\ m_c+C_1C_2\le D \qquad (1).$$

Para calcular A_1A_2 calcularemos de dos maneras la potencia del punto A_2 respecto de la circunferencia circunscrita :

$$A_1A_2\cdot AA_2=BA_2\cdot A_2C\Longleftrightarrow m_a\cdot A_1A_2=\frac{a^2}{4}$$

y análogamente se obtienen $B_1B_2 = \frac{b^2}{4m_b}$ y $C_1C_2 = \frac{c^2}{4m_c}$.

Sustituyendo en (1) y sumándolas resulta

$$\frac{4m_a^2 + a^2}{4m_a} + \frac{4m_b^2 + b^2}{4m_b} + \frac{4m_c^2 + c^2}{4m_c} \leq 3D$$

pero utilizando el teorema de la mediana, los numeradores son, respectivamente

$$2b^2 + 2c^2,\ \ 2c^2 + 2a^2,\ \ 2a^2 + 2b^2$$

con lo que se obtiene

$$\frac{a^2 + b^2}{2m_c} + \frac{b^2 + c^2}{2m_a} + \frac{c^2 + a^2}{2m_b} \leq 3D,$$

que es claramente equivalente a la propuesta.